2025年普通高等学校招生全国统一考试(新I卷数学)

★考生回忆版仅供参考★

注意事项:

1. 答卷前,考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号,试室号,座位号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型和考生号填涂在答题卡相应位置上。

2. 选择题每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应的题目选项的答案信息点涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再填涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上;如需改动,先划掉原来的答案,然后再写上新的答案,不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效

一、选择题: 本大题共8小题, 每小题5分, 共计40分.每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是正确的.请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1. $(1+5i)i$ 的虚部为 ( )

A. -1 B. 0 C. 1 D. 6

2. 设全集 $U=\{x|x$ 是小于9的正整数$\}$, 集合 $A=\{1,3,5\}$, 则 $\complement_U A$ 中元素个数为 ( )

A. 2 B. 3 C. 5 D. 8

3. 若双曲线 C 的虚轴长为实轴长的 $\sqrt{7}$ 倍, 则 C 的离心率为 ( )

A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{7}$ D. $2\sqrt{2}$

4. 若点 $(a,0)(a>0)$ 是函数 $y=2\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称中心, 则 a 的最小值为 ( )

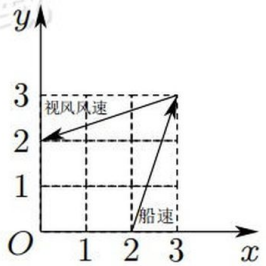
A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{4\pi}{3}$

5. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上且周期为2的偶函数, 当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时, $f(x)=5-2x$, 则 $f\left(-\frac{3}{4}\right)=$ ( )

A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

6. 帆船比赛中,运动员可借助风力计测定风速的大小和方向,测出的结果在航海学中称为视风风速,视风风速对应的向量,是真风风速对应的向量与船行风速对应的向量之和,其中船行风速对应的向量与船速对应的向量大小相等,方向相反。图1给出了部分风力等级、名称与风速大小的对应关系。已知某帆船运动员在某时刻测得的视风风速对应的向量与船速对应的向量如图2(风速的大小和向量的大小相同,单位 (m/s),则真风为 ( )

等级	风速大小 m/s	名称
2	1.1~3.3	轻风
3	3.4~5.4	微风
4	5.5~7.9	和风
5	8.0~10.1	劲风



A. 轻风 B. 微风 C. 和风 D. 劲风

高考直通车 App生成
高考直通车

7. 若圆 $x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$ 上到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离为1的点有且仅有2个，则 r 的取值范围是（　　）

A. $(0,1)$　　B. $(1,3)$　　C. $(3,+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

8. 若实数 x,y,z 满足 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z$，则 x,y,z 的大小关系不可能是（　　）

A. $x>y>z$　　B. $x>z>y$　　C. $y>x>z$　　D. $y>z>x$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为 BC 中点，则（　　）

A. $AD\perp A_1C$　　B. $BC\perp$ 平面 AA_1D　　C. $CC_1 /\!/$ 平面 AA_1D　　D. $AD /\!/ A_1B_1$

10. 设抛物线 $C:y^2=6x$ 的焦点为 F，过 F 的直线交 C 于 A、B，过 F 且垂直于 AB 的直线交准线 $l:x=-\frac{3}{2}$ 于 E，过点 A 作准线 l 的垂线，垂足为 D，则（　　）

A. $|AD|=|AF|$　　B. $|AE|=|AB|$　　C. $|AB|\geqslant 6$　　D. $|AE|\cdot|BE|\geqslant 18$

11. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{4}$，若 $\cos 2A+\cos 2B+2\sin C=2$，$\cos A\cos B\sin C=\frac{1}{4}$，则（　　）

A. $\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B$　　B. $AB=\sqrt{2}$

C. $\sin A+\sin B=\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $AC^2+BC^2=3$

三、填空题：本大题共3小题，每小题5分，共计15分.

12. 若直线 $y=2x+5$ 是曲线 $y=e^x+x+a$ 的切线，则 $a=$ _____.

13. 若一个正项等比数列的前4项和为4，前8项和为68，则该等比数列的公比为_____.

14. 一个箱子里有5个相同的球，分别以1～5标号，从中有放回地取三次，记至少取出一次的球的个数 X，则数学期望 $E(X)=$ _____.

四、解答题：本题共5小题，共77分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13分) 为研究某乘病与超声波检查结果的关系，从做过超声波检查的人群中随机调查了1000人，得到如下列联表：

超声波检查结果 / 组别	正常	不正常	合计
患该疾病	20	180	200
未患该疾病	780	20	800
合计	800	200	1000

(1) 记超声波检查结果不正常者患该疾病的概率为 P，求 P 的估计值；

(2) 根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，分析超声波检查结果是否与患该疾病有关.

高考直通车 App生成
高考直通车

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(\chi^2\geqslant k)$	0.005	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

@高考直通车试题库
海量高清试题免费下载

16. (15 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$\dfrac{a_{n+1}}{n}=\dfrac{a_n}{n+1}+\dfrac{1}{n(n+1)}$.

(1) 证明：$\{na_n\}$ 为等差数列；

(2) 设 $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$，求 $f'(-2)$.

@高考直通车试题库
海量高清试题免费下载

17. (15 分)

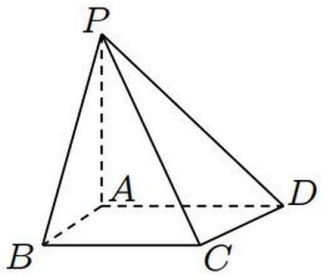
如图所示的四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\parallel AD$，$AB\perp AD$.

(1) 证明：平面 $PAB\perp$ 平面 PAD；

(2) 若 $PA=AB=\sqrt{2}$，$AD=\sqrt{3}+1$，$BC=2$，P,B,C,D 在同一个球面上，设该球面的球心为 O.

(i) 证明：O 在平面 $ABCD$ 上；

(ii) 求直线 AC 与直线 PO 所成角的余弦值.



@高考直通车试题库
海量高清试题免费下载

高考直通车
App生成
高考直通车

18. (17 分)

设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$，下顶点为 A，右顶点为 B，$|AB|=\sqrt{10}$.

(1) 求椭圆的标准方程；

(2) 已知动点 P 不在 y 轴上，点 R 在射线 AP 上，且满足 $|AR|\cdot|AP|=3$.

(i) 设 $P(m,n)$，求点 R 的坐标 (用 m,n 表示)；

(ii) 设设直线 OQ 的斜率为 k_1，直线 OP 的斜率为 k_2，若 $k_1=3k_2$，M 为椭圆上一点，求 |PM| 的最大值。

19. (17 分)

设函数 $f(x)=5\cos x-\cos 5x$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 的最大值；

(2) 给定 $\theta\in(0,\pi)$，设 a 为实数，证明：存在 $y\in[a-\theta,a+\theta]$，使得 $\cos y\leqslant\cos\theta$；

(3) 设 $b\in\mathbb{R}$，若存在 φ 使得对任意 x，都有 $5\cos x-\cos(5x+\varphi)\leqslant b$，求 b 的最小值.

@高考直通车试题库 海量高清试题免费下载

高考直通车 App生成 高考直通车

2025年全国统一高考数学试卷（新高考Ⅰ）

参考答案与试题解析

一．选择题（共8小题）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	C	D	C	A	A	B	B

二．多选题（共3小题）

题号	9	10	11
答案	BC	ACD	ABC

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共计40分。每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的。请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上。

1．（5分）$(1+5i)i$ 的虚部为（　　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．6

【分析】根据复数乘法直接运算确定虚部即可．

【解答】解：令 $z=(1+5i)i$，则 $z=5i^2+i=-5+i$，

所以 z 的虚部为1．

故选：C．

【点评】本题主要考查复数的乘法运算，考查学生基本的数学运算能力，属于基础题．

2．（5分）设全集 $U=\{x\mid x$ 是小于9的正整数$\}$，集合 $A=\{1，3，5\}$，则 $\complement_U A$ 中元素个数为（　　）

A．2　　B．3　　C．5　　D．8

【分析】根据题意直接写出 $C_U A$ 即可确定其元素个数．

【解答】解：根据题意，$C_U A=\{2，4，6，7，8\}$，

所以 $C_U A$ 的元素个数为5．

故选：C．

【点评】本题主要考补集运算，考查学生基本的数学运算能力，属于基础题．

3．（5分）若双曲线 C 的虚轴长为实轴长的 $\sqrt{7}$ 倍，则 C 的离心率为（　　）

高考直通车 App生成

围是(　　)

A．$(0,1)$　　B．$(1,3)$　　C．$(3,+\infty)$　　D．$(0,+\infty)$

【分析】求解圆的圆心到直线的距离，与圆的半径比较，即可得到r的范围．

【解答】解：圆$x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$的圆心$(0,-2)$，半径为r，

圆心到直线$y=\sqrt{3}x+2$的距离$d=\frac{|2+2|}{\sqrt{1+3}}=2$，

圆$x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$上到直线$y=\sqrt{3}x+2$的距离为1的点有且仅有2个，

可得$d-1<r<d+1$，即$r\in(1,3)$．

故选：B．

【点评】本题考查直线与圆的位置关系的应用，是中档题．

8．（5分）若实数x，y，z满足$2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z$，则$x$，$y$，$z$的大小关系不可能是(　　)

A．$x>y>z$　　B．$x>z>y$　　C．$y>x>z$　　D．$y>z>x$

【分析】利用特殊值验证法，求解判断即可．

【解答】解：令$x=2$，则$3=2+\log_2 2=3+\log_3 y=5+\log_5 z$，

可得$y=1$，$z=\frac{1}{25}$，

所以$x>y>z$．A可能正确；

当$z=1$时，$y=9$，$x=8$，所以$y>x>z$，所以C可能正确；

$z=125$时，$y=243$，此时$x=64$，满足$y>z>x$，所以D可能正确．

故选：B．

【点评】本题考查对数值的大小比较，特殊值方法的应用，是中档题．

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

（多选）9．（6分）在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D为BC中点，则(　　)

A．$AD\perp A_1C$　　B．$BC\perp$平面AA_1D　　C．$CC_1//$平面AA_1D　　D．$AD//A_1B_1$

【分析】对于A，通过$A_1D_1\perp CD_1$，可以得出AD与A_1C不垂直；对于B，$AD\perp BC$，$AA_1\perp BC$，从而$BC\perp$平面AA_1D；对于C，由$CC_1//AA_1$，得$CC_1//$平面AA_1D；对于D，由$AB\bigcap AD=A$，$AB//A_1B_1$，得AD与A_1B_1不平行．

高考直通车 App生成

【解答】解：在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为 BC 中点，

对于 A，取 B_1C_1 中点 D_1，连接 A_1D_1，CD_1，

因为 $A_1D_1\perp CD_1$，$A_1D_1//AD$，所以 A_1D_1 与 A_1C 不垂直，即 AD 与 A_1C 不垂直，故 A 错误；

对于 B，$AD\perp BC$，$AA_1\perp BC$，$AD\bigcap AA_1=A$，

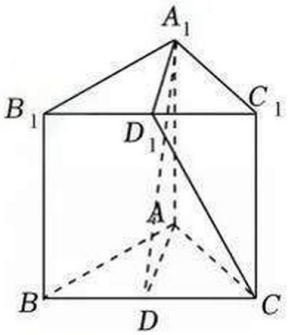
$\therefore BC\perp$ 平面 AA_1D，故 B 正确；

对于 C，$\because CC_1//AA_1$，$CC_1\not\subset$ 平面 AA_1D，$AA_1\subset$ 平面 AA_1D，$\therefore CC_1//$ 平面 AA_1D，故 C 正确；

对于 D，$\because AB\bigcap AD=A$，$AB//A_1B_1$，

$\therefore AD$ 与 A_1B_1 不平行，故 D 错误.

故选：BC.



【点评】本题考查线线垂直、线面垂直、线面平行、线线平行的判定与性质等基础知识，考查空间思维能力，是中档题.

（多选）10.（6 分）设抛物线 $C:y^2=6x$ 的焦点为 F，过 F 的直线交 C 于 A、B，过 F 且垂直于 AB 的直线交准线 $l:x=-\frac{3}{2}$ 于 E，过点 A 作准线 l 的垂线，垂足为 D，则（　　）

A．$|AD|=|AF|$　　B．$|AE|=|AB|$　　C．$|AB|\geqslant 6$　　D．$|AE|\cdot|BE|\geqslant 18$

【分析】由抛物线的定义可判断 A；当直线 $AB\perp x$ 轴时，可判断 B；由通径最短，可判断 C；当直线 $AB\perp x$ 轴时，可判断 D 成立，再利用三角形的面积判断 $m\neq 0$ 时，D 也成立.

【解答】解：由题意可得 $F(\frac{3}{2},0)$，

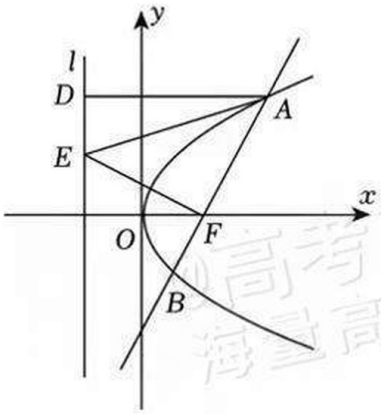
由抛物线的定义知 $|AD|=|AF|$，所以 A 正确；

由通径最短，可得 $|AB|\geqslant 2p=6$，所以 C 正确；

设 $AB:x=my+\frac{3}{2}$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

高考直通车 App生成

由 $\begin{cases} x = my + \frac{3}{2} \\ y^2 = 6x \end{cases}$，



消 x 可得 $y^2 - 6my - 9 = 0$，

$y_1 + y_2 = 6m$，$y_1 y_2 = -9$，

所以 $x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 3 = 6m^2 + 3$，

所以 $|AB| = x_1 + \frac{3}{2} + x_2 + \frac{3}{2} = 6m^2 + 6$，

当 $m = 0$ 时，$E(-\frac{3}{2}, 0)$，$|AB| = 2p = 6$，$|AE| = \sqrt{AF^2 + EF^2} = 3\sqrt{2}$，

此时 $|AB| = 6$，$|AE| \neq |AB|$，所以 B 不正确；

此时 $|AE| = |BE| = 3\sqrt{2}$，$|AE| \cdot |BE| = 18$，

当 $m \neq 0$ 时，$EF: x = -\frac{1}{m} y + \frac{3}{2}$，$E(-\frac{3}{2}, 3m)$，

则 $|EF| = \sqrt{9 + 9m^2}$，

所以 $S_{\triangle AEB} = \frac{1}{2}|AE| \cdot |BE| \sin \angle AEB = \frac{1}{2}|AB| \cdot |EF| = \frac{1}{2}(6m^2 + 6)\sqrt{9 + 9m^2} > 9$，

$|AE| \cdot |BE| > \frac{18}{\sin \angle AEB} > 18$，

综上 $|AE| \cdot |BE| \geqslant 18$，所以 D 正确.

故选：ACD.

【点评】本题考查了抛物线的定义及性质，考查了数形结合思想，属于中档题.

（多选）11.（6 分）已知△ ABC 的面积为 $\frac{1}{4}$，若 $\cos 2A + \cos 2B + 2\sin C = 2$，$\cos A \cos B \sin C = \frac{1}{4}$，则（　　）

A．$\sin C = \sin^2 A + \sin^2 B$　　B．$AB = \sqrt{2}$

高考直通车
App生成

C．$\sin A+\sin B=\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D．$AC^2+BC^2=3$

【分析】由 $\cos 2A+\cos 2B+2\sin C=2$，利用二倍角公式，可判断 A；由 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，得 $\sin A(\sin A-\cos B)+\sin B(\sin B-\cos A)=0$，对于 $A+B>\frac{\pi}{2}$，和 $A+B<\frac{\pi}{2}$ 进行分类讨论，可推出矛盾，可得 $A+B=\frac{\pi}{2}$，进而可判断 BCD．

【解答】解：因为 $\cos 2A+\cos 2B+2\sin C=1-2\sin^2 A+1-2\sin^2 B+2\sin C=2$，

$\therefore \sin^2 A+\sin^2 B=\sin C$，故 A 正确；

由 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，$\therefore \sin A(\sin A-\cos B)+\sin B(\sin B-\cos A)=0$，

$\because \cos A\cos B\sin C=\frac{1}{4}>0$，$\therefore A$，$B$ 为锐角，

若 $A+B>\frac{\pi}{2}$，则 $\begin{cases}A>\frac{\pi}{2}-B\\ B>\frac{\pi}{2}-A\end{cases}$，

$\therefore \sin A>\cos B$，$\sin B>\cos A$，$\sin A(\sin A-\cos B)+\sin B(\sin B-\cos A)>0$，$\therefore$ 矛盾，舍去，

同理，$A+B<\frac{\pi}{2}$ 也矛盾，

$\therefore A+B=\frac{\pi}{2}$，$\therefore B=\frac{\pi}{2}-A$，$C=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \sin A\cos A=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{2}\sin 2A=\frac{1}{4}$，$\sin 2A=\frac{1}{2}$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{4}$，$ab=\frac{1}{2}$，

$a=c\sin A$，$b=c\cos A$，

$\therefore ab=\frac{1}{2}=c\sin A\cdot c\cos A=c^2\sin A\cos A=\frac{1}{4}c^2$，

$\therefore c^2=2$，即 $AB=\sqrt{2}$，故 B 正确；

$\because C=\frac{\pi}{2}$，$\therefore \sin A+\sin B=\sin A+\cos A$，$(\sin A+\cos A)^2=1+2\sin A\cos A=\frac{3}{2}$，

因为 $\sin A+\cos A>0$，所以 $\sin A+\cos A=\frac{\sqrt{6}}{2}$，故 C 正确；

$AC^2+BC^2=AB^2=2$，故 D 错误．

故选：ABC．

【点评】本题主要考查解三角形，属于中档题．

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分。

高考直通车 App生成

12．（5 分）若直线 $y=2x+5$ 是曲线 $y=e^x+x+a$ 的切线，则 $a=$ __4__ ．

【分析】根据题意，令 $y'=e^x+1=2$，求出 x 的值即可确定切点坐标，进一步将切点坐标代入曲线 $y=e^x+x+a$ 中即可确定 a 值．

【解答】解：根据题意，$y'=e^x+1$，令 $y'=e^x+1=2$，则 $x=0$，

在切线 $y=2x+5$ 中，当 $x=0$ 时，$y=5$，

所以切点坐标为 $(0,5)$，

将 $(0,5)$ 代入曲线 $y=e^x+x+a$ 中，得 $5=1+a$，解得 $a=4$．

故答案为：4．

【点评】本题主要考查导数与切线方程，考查学生归纳推理与数学运算的能力，属于基础题．

13．（5 分）若一个正项等比数列的前 4 项和为 4，前 8 项和为 68，则该等比数列的公比为 __2__ ．

【分析】根据等比数列的性质，建立方程，即可求解．

【解答】解：根据题意可得 $a_1+a_2+a_3+a_4=4$，$a_5+a_6+a_7+a_8=68-4=64$，

所以 $a_5+a_6+a_7+a_8=(a_1+a_2+a_3+a_4)\times q^4=4\times q^4=64$，

解得 $q=2(q=-2$ 舍）．

故答案为：2．

【点评】本题考查等比数列的性质，属基础题．

14．（5 分）一个箱子里有 5 个相同的球，分别以 1～5 标号，从中有放回地取三次，记至少取出一次的球的个数 X，则数学期望 $E(X)=$ __$\frac{61}{25}$__ ．

【分析】X 的可能取值为 1，2，3，分别求出对应的概率，由离散型随机变量的数学期望公式求解即可．

【解答】解：X 的可能取值为 1，2，3，

$P(X=1)=(\frac{1}{5})^3\times 5=\frac{1}{25}$，

$P(X=2)=C_3^2(\frac{1}{5})^2\times\frac{1}{5}\times 2\cdot C_5^2=\frac{12}{25}$，

$P(X=3)=(\frac{1}{5})^3\times 6\times C_5^3=\frac{12}{25}$，

$E(X)=\frac{1}{25}+\frac{24}{25}+\frac{36}{25}=\frac{61}{25}$．

故答案为：$\frac{61}{25}$．

高考直通车 App生成

【点评】本题考查离散型随机变量的数学期望，是中档题.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）为研究某疾病与超声波检查结果的关系，从做过超声波检查的人群中随机调查了 1000 人，得到如下列联表：

超声波检查结果 组别	正常	不正常	合计
患该疾病	20	180	200
未患该疾病	780	20	800
合计	800	200	1000

（1）记超声波检查结果不正常者患该疾病的概率为 P，求 P 的估计值；

（2）根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，分析超声波检查结果是否与患该疾病有关.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(\chi^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【分析】（1）由样本估计总体和古典概型的概率求法即可求得；

（2）由独立性检验知识即可求解.

【解答】解：（1）由题知，样本中超声波检查结果不正常者患该疾病的概率为 $\dfrac{180}{200}=\dfrac{9}{10}$，

由样本估计总体可得超声波检查结果不正常者患该疾病的概率 $P=\dfrac{9}{10}$；

（2）零假设 H_0 为：超声波检查结果与患该疾病无关.

代入 2×2 列联表中的数据可得：$\chi^2=\dfrac{1000(20\times20-180\times780)^2}{800\times200\times200\times800}=\dfrac{6125}{8}=765.625>10.828$，

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为超声波检查结果与患该疾病有关，

该推断犯错误的概率不超过 0.001.

【点评】本题考查古典概型的概率求解，独立性检验的应用，属于中档题.

16.（15 分）设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$\dfrac{a_{n+1}}{n}=\dfrac{a_n}{n+1}+\dfrac{1}{n(n+1)}$.

（1）证明：$\{na_n\}$ 为等差数列；

（2）设 $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$，求 $f'(-2)$.

高考直通车
App生成

【分析】（1）将条件式两边同时乘以 $n(n+1)$ 后移项即可证得；

（2）由（1）得 $na_n=n+2$，对函数求导后赋值可得 $f'(-2)$ 的形式，由错位相减法求和即可．

【解答】解：（1）证明：因为 $\frac{a_{n+1}}{n}=\frac{a_n}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$，

所以 $(n+1)a_{n+1}=na_n+1$，即 $(n+1)a_{n+1}-na_n=1$，

因为 $a_1=3$，所以数列 $\{na_n\}$ 是首项为 3，公差为 1 的等差数列；

（2）由（1）知，$na_n=3+n-1=n+2$，

因为 $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$，

所以 $f'(x)=a_1+2a_2x+\ldots+ma_mx^{m-1}=3+4x+5x^2+\ldots+(m+1)x^{m-2}+(m+2)x^{m-1}$，

所以 $f'(-2)=3+4\times(-2)+5\times(-2)^2+\ldots+(m+1)(-2)^{m-2}+(m+2)(-2)^{m-1}$，①

$-2f'(-2)=3\times(-2)+4\times(-2)^2+5\times(-2)^3+\ldots+(m+1)(-2)^{m-1}+(m+2)(-2)^m$，②

①－②得：$3f'(-2)=3+(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+\ldots+(-2)^{m-1}-(m+2)(-2)^m$

$=3+\frac{-2[1-(-2)^{m-1}]}{1-(-2)}-(m+2)(-2)^m=\frac{7}{3}-\frac{3m+7}{3}\cdot(-2)^m$，

所以 $f'(-2)=\frac{7}{9}-\frac{3m+7}{9}\cdot(-2)^m$，$m\in N^*$．

【点评】本题考查等差数列的概念，错位相减法求和，导数的运算，属于中档题．

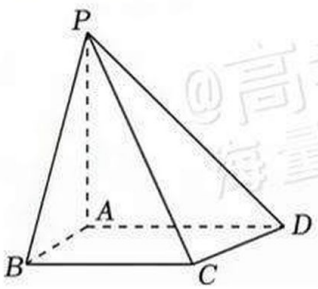
17．（15 分）如图所示的四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BC//AD$，$AB\perp AD$．

（1）证明：平面 $PAB\perp$ 平面 PAD；

（2）若 $PA=AB=\sqrt{2}$，$AD=\sqrt{3}+1$，$BC=2$，P，B，C，D 在同一个球面上，设该球面的球心为 O．

（*i*）证明：O 在平面 $ABCD$ 上；

（*ii*）求直线 AC 与直线 PO 所成角的余弦值．



【分析】（1）由 $PA\perp$ 平面 $ABCD$ 得 $PA\perp AB$，结合题意，可得 $AB\perp$ 平面 PAD，再由面面垂直的判定定理证明即可；

高考直通车 App生成

（2）(*i*) 建立空间直角坐标系，设球心 $O(x,\ y,\ z)$，半径 R，利用空间中两点的距离公式建立方程组，解方程组可得 O 点坐标和 R，进而可得结论；

(*ii*) 利用空间向量法求异面直线所成角的余弦值即可.

【解答】解：（1）证明：$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore PA\perp AB$，

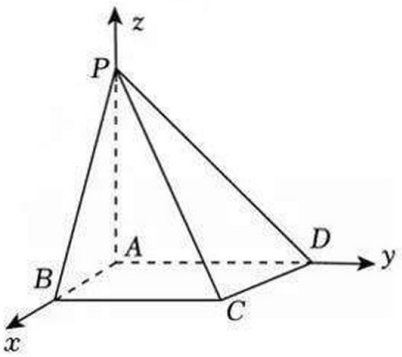
$\because AB\perp AD$，$AD\bigcap PA=A$，AD，$PA\subset$ 平面 PAD，

$\therefore AB\perp$ 平面 PAD，

$\because AB\subset$ 平面 PAB，

$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PAD.

（2）(*i*) 证明：由题意，AB，AD，AP 两两垂直，分别以 AB，AD，AP 为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，



则 $B(\sqrt{2},0,0)$，$C(\sqrt{2},2,0)$，$D(0,\sqrt{3}+1,0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，

设球心 $O(x,\ y,\ z)$，半径 R，

则 $\begin{cases}OP=R\\OB=R\\OC=R\\OD=R\end{cases}$，即 $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+(z-\sqrt{2})^2}=R\\\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+y^2+z^2}=R\\\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-2)^2+z^2}=R\\\sqrt{x^2+(y-\sqrt{3}-1)^2+z^2}=R\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=0\\y=1\\z=0\\R=\sqrt{3}\end{cases}$，

$\therefore O(0,\ 1,\ 0)$，$\therefore O\in$ 平面 $ABCD$.

(*ii*) 由 (*i*) 得 $\overrightarrow{AC}=(\sqrt{2},2,0)$，$\overrightarrow{PO}=(0,1,-\sqrt{2})$，

设直线 AC 与直线 PO 所成角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos<\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PO}>|=\dfrac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PO}|}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{PO}|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

【点评】本题考查平面与平面垂直的判定，考查异面直角所成的角的余弦值，考查空间几何体的外接球的

高考直通车 App生成

确定，是中档题.

18.（17分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$，椭圆下顶点为 A，右顶点为 B，$|AB|=\sqrt{10}$.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）已知动点 P 不在 y 轴上，点 R 在射线 AP 上，且满足 $|AR|\cdot|AP|=3$.

(i) 设 $P(m,n)$，求点 R 的坐标（用 m，n 表示）；

(ii) 设 O 为坐标原点，Q 是 C 上的动点，直线 OR 的斜率是直线的 OP 斜率的3倍，求 $|PQ|$ 的最大值.

【分析】（1）由 $A(0,-b)$，$B(a,0)$，$|AB|=\sqrt{10}$，$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$c^2=a^2-b^2$，列方程组求出 a^2，b^2 即可；

（2）(i) 设点 $P(m,n)$，$R(x,y)$，由题意列方程组求解可得 R 的坐标；

(ii) 求出直线 OQ 的斜率 k_1，直线 OP 的斜率 k_2，由 $k_1=3k_2$，得出点 P 的轨迹为圆，又 Q 为椭圆上一点，计算 $|PQ|$ 的最大值为点 M 到圆心的距离＋半径，由此求解即可.

【解答】解：（1）由题意知，$A(0,-b)$，$B(a,0)$，所以 $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}$，所以 $a^2+b^2=10$；

又因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $c=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$，所以 $c^2=a^2-b^2=\frac{8}{9}a^2$，所以 $a^2=9b^2$；

所以 $b^2=1$，$a^2=9$，椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+y^2=1$；

（2）(i) 设点 $P(m,n)$，$R(x,y)$，由题意知，$A(0,-1)$，$|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AR}|=3$，$\overrightarrow{AP}=(m,n+1)$，$\overrightarrow{AR}=(x,y+1)$，

其中 $m\neq 0$；

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AR}=3$，即 $mx+(n+1)(y+1)=3$ ①，

又因为 R 在 AP 上，所以 $y=\frac{n+1}{m}x-1$，即 $(n+1)x-my=m$ ②；

由①②联立求解得 $\begin{cases}x=\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}\\ y=\frac{-m^2-n^2+n+2}{m^2+(n+1)^2}\end{cases}$，

所以点 R 的坐标为 $(\frac{3m}{m^2+(n+1)^2},\frac{-m^2-n^2+n+2}{m^2+(n+1)^2})$；

(ii) 直线 OR 的斜率为 $k_1=\frac{-m^2-n^2+n+2}{3m}$，直线 OP 的斜率为 $k_2=\frac{n}{m}$，

若 $k_1=3k_2$，则 $\frac{-m^2-n^2+n+2}{3m}=\frac{3n}{m}$，即 $m^2+(n+4)^2=18$，

所以点 P 在以 $(0,-4)$ 为圆心，$3\sqrt{2}$ 为半径的圆上，又 Q 为椭圆 $x^2+9y^2=9$ 上一点，

高考直通车 App生成

设$Q(x,y)$，所以$|PQ|$长度为$\sqrt{x^2+(y+4)^2}+3\sqrt{2}=\sqrt{9-9y^2+(y+4)^2}+3\sqrt{2}=\sqrt{-8(y-\frac{1}{2})^2+27}+3\sqrt{2}$，

因为$-1\leqslant y\leqslant 1$，所以$y=\frac{1}{2}$时，$|PQ|$的长度取得最大值为$3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$．

【点评】本题考查了圆锥曲线的定义与性质应用问题，也考查了运算求解能力，是难题．

19．（17分）设函数$f(x)=5\cos x-\cos 5x$．

（1）求$f(x)$在$[0,\ \frac{\pi}{4}]$的最大值；

（2）给定$\theta\in(0,\pi)$，a为给定实数，证明：存在$y\in[a-\theta,\ a+\theta]$，使得$\cos y\leqslant\cos\theta$；

（3）若存在φ使得对任意x，都有$5\cos x-\cos(5x+\varphi)\leqslant b$，求$b$的最小值．

【分析】（1）利用函数的导数，判断函数的单调性，然后综合求解函数的最值．

（2）若$\theta\in(0,\frac{\pi}{2}]$，推出$(\cos y)_{min}\leqslant\cos\theta$，若$\theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，不妨$a\in[0,\ 2\pi)$，通过①$\pi\in(a-\theta,a+\theta)$，②$a+\theta\leqslant\pi$，③$a-\theta\geqslant\pi$，分别证明存在$y\in[a-\theta,\ a+\theta]$，使得$\cos y\leqslant\cos\theta$．

（3）构造函数$h(x)=5\cos x-\cos(5x+\varphi)$，利用导数推出$h(x)_{max}=max\{4\cos(-\frac{\varphi}{4}+\frac{k_1}{2}\pi),6\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}+\frac{k_2}{3}\pi)\}$，

显然$4cos\left(-\frac{\varphi}{4}+\frac{k_1}{2}\pi\right)\leq 4$，记$q(\varphi)=6cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}+\frac{k_2}{3}\pi\right)$，结合函数的性质，推出$b\geq q(\varphi)_{min}=3\sqrt{3}$，即可推出结果．

【解答】（1）解：由已知得：$f'(x)=-5\sin x+5\sin 5x=5[\sin(3x+2x)-\sin(3x-2x)]$

$=5(\sin 3x\cdot\cos 2x+\cos 3x\cdot\sin 2x-\sin 3x\cdot\cos 2x+\cos 3x\cdot\sin 2x)$

$=10\cos 3x\cdot\sin 2x$，

因为$x\in[0,\frac{\pi}{4}]$，所以$2x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$3x\in[0,\frac{3\pi}{4}]$，

所以$\sin 2x\geqslant 0$，故只需判断$\cos 3x$的符号即可，由$\cos 3x=0$，解得$x=\frac{\pi}{6}$，

所以当$x\in(0,\frac{\pi}{6})$时，$f'(x)>0$，当$x\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$时，$f'(x)<0$，

所以$f(x)$在$x\in(0,\frac{\pi}{6})$单调递增，在$x\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$单调递减，

所以$f(x)_{max}=f(\frac{\pi}{6})=3\sqrt{3}$；

（2）证明：若$\theta\in(0,\frac{\pi}{2}]$，则$(\cos y)_{min}\leq\frac{\cos(a-\theta)+\cos(a+\theta)}{2}=\cos a\cos\theta\leq\cos\theta$，

若$\theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，不妨$a\in[0,\ 2\pi)$，

①若$\pi\in(a-\theta,a+\theta)$，则$(\cos y)_{min}=-1\leqslant\cos\theta$；

高考直通车 App生成

②若 $a+\theta\leqslant\pi$，此时 $a+\theta,\theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，所以 $\cos(a+\theta)<\cos\theta$，

令 $y=a+\theta$，可知存在 $y\in[a-\theta,\ a+\theta]$，使得 $\cos\leqslant\cos\theta$；

③若 $a-\theta\geqslant\pi$，此时 $\pi<a-\theta<2\pi-\theta<3$，所以 $\cos(a-\theta)<\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$，

令 $y=a-\theta$，可知存在 $y\in[a-\theta,\ a+\theta]$，使得 $\cos y\leqslant\cos\theta$；

综上，存在 $y\in[a-\theta,\ a+\theta]$，使得 $\cos y\leqslant\cos\theta$，证毕.

（3）解：令 $h(x)=5\cos x-\cos(5x+\varphi)$，$h'(x)=-5\sin x+5\sin(5x+\varphi)$，

由于 $h(x)$ 周期为 2π，不妨设 $x\in[-\pi,\ \pi]$，$\varphi\in[-\pi,\ \pi]$，

因为 $h(x)$ 连续且处处可导，所以 $h(x)$ 最大值在根值点处取得，

令 $h'(x)=0$，$\sin(5x+\varphi)=\sin x$，所以 $5x+\varphi=x+2k_1\pi$ 或 $5x+\varphi=\pi-x+2k_2\pi$，

所以 $x=-\frac{\varphi}{4}+\frac{k_1\pi}{2}$ 或 $x=\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}+\frac{k_2\pi}{3}(k_1,k_2\in Z)$，

当 $x=-\frac{\varphi}{4}+\frac{k_1\pi}{2}$ 时，$h(x)=5\cos x-\cos x=4\cos x=4\cos(-\frac{\varphi}{4}+\frac{k_1}{2}\pi)$，

当 $x=\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}+\frac{k_2\pi}{3}$，$h(x)=5\cos x-\cos(\pi-x+2k_2\pi)=6\cos x=6\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}+\frac{k_2}{3}\pi)$，

所以 $h(x)_{max}=max\{4\cos(-\frac{\varphi}{4}+\frac{k_1}{2}\pi),\ 6\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}+\frac{k_2}{3}\pi)\}$，

显然 $4cos\left(-\frac{\varphi}{4}+\frac{k_1}{2}\pi\right)\leq 4$，记 $q(\varphi)=6cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}+\frac{k_2}{3}\pi\right)$，

取值情况最多有 6 种，相当于 $p(x)=6\cos x$ 图象上以 $A(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6},p(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}))$ 为起点，横坐标以 $\frac{\pi}{3}$ 为跨度，往后总共取 6 个点，

由 $p(x)$ 图象可知，$\varphi=0$ 时，$q(\varphi)$ 取最小值 $3\sqrt{3},3\sqrt{3}>4$，

所以 $b\geqslant 5\cos x-\cos(5x+\varphi)$，所以 $b\geq q(\varphi)_{min}=3\sqrt{3}$，

此时 $h(x)\leq 3\sqrt{3}$ 恒成立，且 $x=\pm\frac{\pi}{6}$ 时取等号，所以 b 的最小值为 $3\sqrt{3}$.

【点评】本题考查函数的导数的应用，函数的单调性研究函数的最值的求法，是难题.

高考直通车 App生成