赣州市2025年高三年级适应性考试

数学试卷

2025年5月

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共150分，考试时间120分钟

第Ⅰ卷（选择题共58分）

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x\,|\,2^x<2\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{-1,0\}$　　B．$\{0\}$　　C．$\{0,1\}$　　D．$\{-1,0,1\}$

2．若复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=2\mathrm{i}-1$，则 $|z|=$

A．$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　B．$\dfrac{5}{2}$　　C．$\sqrt{10}$　　D．10

3．平面 α // 平面 β 的一个充分条件是

A．存在一条直线 a，$a /\!/ \alpha$，$a /\!/ \beta$

B．存在一条直线 a，$a\subset\alpha$，$a /\!/ \beta$

C．存在两条异面直线 a,b，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a /\!/ \beta$，$b /\!/ \alpha$

D．存在两条平行直线 a,b，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a /\!/ \beta$，$b /\!/ \alpha$

4．若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为

A．$-3\boldsymbol{a}$　　B．$-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{a}$　　C．$-3\boldsymbol{b}$　　D．$-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{b}$

5．已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为2的奇函数，则 $f(-5)=$

A．-5　　B．0　　C．2　　D．5

6．设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_{20}=21$，$S_{30}=49$，则 $S_{10}=$

A．-7　　B．7　　C．63　　D．7 或 63

7．若点 $P(1,\sqrt{3})$ 关于直线 $y=kx$ 对称的点在圆 $x^2+y^2-8y+12=0$ 上，则 k 的值为

A．$-2-\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{3}-2$　　C．$2-\sqrt{3}$　　D．$2+\sqrt{3}$

8．若 $0<\alpha<\beta<1$，则

A．$\alpha^{\beta}>\beta^{\alpha}$　　B．$\alpha\log_2\beta<\beta\log_2\alpha$

C．$\sin\alpha+\sin\beta>\alpha$　　D．$\tan\beta<\alpha+\beta$

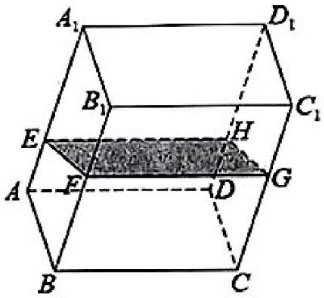
二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．设$(x-1)^9=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_9x^9$，则

A．$a_0=1$　　　　B．$a_1+a_2+\cdots+a_9=0$

C．$a_4+a_5=0$　　　　D．$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=256$

10．如图，透明长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$容器内灌入了一些水，边BC固定在地面．若改变容器的倾斜度(水不溢出)，则



A．水的体积不变

B．水的部分呈棱柱状

C．水面四边形$EFGH$的面积不变

D．当E在棱AA_1上时，$AE+BF$是定值

11．设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\mathrm{e}^{a_n}-a_n-1$，则

A．$a_2<\dfrac{1}{4}$　　　　B．$a_7<a_8$

C．$S_{50}<13$　　　　D．$a_5<|3a_1-5a_3|$

第Ⅱ卷（非选择题共 92 分）

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12．若随机变量$X\sim N(2,\sigma^2)$，$P(X<2a)=P(X>a+3)$，则a的值为__________．

13．若函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$在区间$\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调，且$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，则正数$\omega$的值为__________．

14．椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F$，上顶点为$A$，直线$l$与椭圆交于$B,C$两点．若$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则$l$的斜率的取值范围是__________．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（13 分）

在一次数学测验中，有单选题(即单项选择题)和多选题(即多项选择题)两种．单选题指四个选项中仅有一个正确，选对得 5 分，选错或不选得 0 分；多选题指四个选项中有两个或三个正确，全部选对得 6 分，部分选对得 3 分，有选错的或不选得 0 分．

（1）在单选题的测验中，小明如果不知道答案就随机猜测．已知小明知道单选题的正确答案的概率是$\frac{2}{3}$，随机猜测的概率是$\frac{1}{3}$，问小明在做某道单选题时，在该道题做对的条件下，求他知道这道单选题正确答案的概率；

（2）小明在做多选题时，选择一个选项的概率为$\frac{1}{5}$，选择两个选项的概率为$\frac{2}{5}$，选择三个选项的概率为$\frac{2}{5}$．已知某个多选题有三个选项是正确的，小明在完全不知道四个选项正误的情况下，只好根据自己的经验随机选择，记小明做这道多选题所得的分数为X，求X的分布列及数学期望．

16．（15 分）

在$\triangle ABC$中，$\cos A=\frac{3}{5}$，$\tan(A-B)=\frac{1}{7}$．

（1）求B；

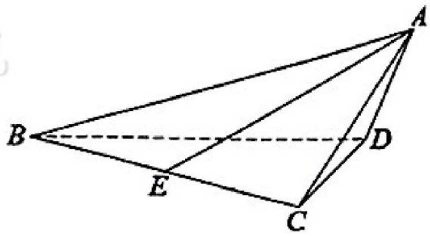
（2）若$\angle BAC$的平分线AD交BC于点D，$\triangle ABC$的面积为15，求AD．

17．（15 分）

如图，三棱锥$A-BCD$中，$\triangle ACD$是等边三角形，$\angle BDC=90^\circ$，E为BC的中点．

（1）证明：$AE\perp CD$；

（2）若$BD=2\sqrt{3}$，$CD=2$，$\tan\angle ACB=-\sqrt{63}$，求$E$到平面$ACD$的距离．



18.（17分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}$，$g(x)=\sin x+\cos x$．

（1）求函数 $y=\dfrac{g(x)-1}{f(x)}, x\in[0,2\pi]$ 的最小值；

（2）当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)+g(x)-2-ax\geqslant 0$，求 a 的取值范围．

19.（17分）

已知点 M 到点 $N(1,0)$ 的距离比到 y 轴的距离大1，M 的轨迹为 C．点 $P_1(t,t+1)$ $(t\geqslant 0)$ 在 C 上，过 P_1 作斜率为 -1 的直线交 C 于另一点 Q_1，设 P_2 与 Q_1 关于 x 轴对称，过 P_2 作斜率为 -1 的直线交 C 于另一点 Q_2，设 P_3 与 Q_2 关于 x 轴对称，……，以此类推，设 $P_n(x_n,y_n)$．

（1）求 C 的方程；

（2）设数列 $\left\{\dfrac{1}{x_n+y_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，证明：$\dfrac{1}{3}\leqslant T_n<\dfrac{1}{2}$；

（3）求 $\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ 的面积．

赣州市 2025 年高三年级适应性考试

数学参考答案

一、选择题：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	A	C	D	B	B	D	C	CD	ABD	ACD

三、填空题：

12. $\frac{1}{3}$　　13. 2　　14. $(0,\sqrt{2})$

四、解答题：

15. 解：(1) 记事件 A 为“该单项选择题回答正确”，事件 B 为“小明知道该题的正确答案”，

$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=\frac{2}{3}\times1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ ……………………2 分

$P(AB)=P(B)P(A|B)=\frac{2}{3}\times1=\frac{2}{3}$ ……………………4 分

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{8}{9}$ ……………………6 分

即所求概率为 $\frac{8}{9}$ ……………………7 分

(2) 由题意知：X 所有可能的取值为 $0,3,6$ ……………………8 分

设事件 A_i 表示小明选择了 i 个选项，事件 C 表示选择的选项是正确的，则

$P(X=0)=1-P(X=2)-P(X=5)=\frac{11}{20}$ ……………………9 分

$P(X=3)=P(A_1C)+P(A_2C)=\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{7}{20}$ ……………………10 分

$P(X=6)=P(A_3C)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{C_4^3}=\frac{1}{10}$ ……………………11 分

得 X 的分布列为：

X	0	3	6
P	$\frac{11}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{10}$

……………………12 分

则 X 的数学期望为

$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_ip_i=\frac{11\times0+3\times7+6\times2}{20}=\frac{33}{20}$ ……………………13 分

16. 解：(1) $\because \cos A=\dfrac{3}{5}$，$A$ 为的 $\triangle ABC$ 内角……………………1 分

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{4}{5}$……………………2 分

$\therefore \tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{4}{3}$……………………4 分

$\therefore \tan B=\tan[A-(A-B)]=\dfrac{\tan A-\tan(A-B)}{1+\tan A\tan(A-B)}=1$……………………6 分

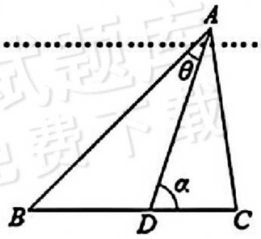
又 $0<B<\pi$，则 $B=\dfrac{\pi}{4}$……………………7 分

(2) 设 $\angle BAC=2\theta$，由 $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=\dfrac{3}{5}$……………………8 分

解得 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$……………………9 分

则 $\sin C=\sin(A+B)=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$……………………10 分

思路一：则 $\sin\alpha=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$……………………11 分



在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理，可得 $BD=\dfrac{AD\sin\theta}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}AD$，

在 $\triangle ACD$ 中，同理可得 $CD=\dfrac{2\sqrt{10}}{14}AD$……………………12 分

则 $BC=BD+CD=\dfrac{12\sqrt{10}}{35}AD$……………………13 分

则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot(AD\cdot\sin\alpha)=\dfrac{18}{35}AD^2=15$……………………14 分

解得 $AD=\dfrac{5\sqrt{42}}{6}$……………………15 分

另解： 则 $b:c=\sin B:\sin C=5:7$……………………11 分

设 $b=5t(t>0)$，则 $c=7t$，

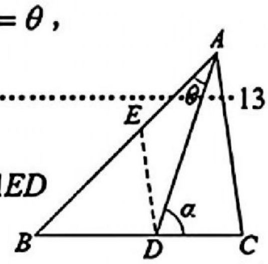
则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=14t^2=15$，解得 $t^2=\dfrac{15}{14}$……………………12 分

思路二：则 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}\cdot(b+c)\cdot AD\cdot\sin\theta$……………………13 分

$=\dfrac{1}{2}\times 12t\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times AD=\dfrac{1}{2}\times 12\times\sqrt{\dfrac{15}{14}}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times AD=15$……………………14 分

解得 $AD=\dfrac{5\sqrt{42}}{6}$……………………15 分

思路三：作 $DE \parallel AC$ 交 AB 于点 E，则 $\angle EDA=\angle CAD=\angle DAE=\theta$，



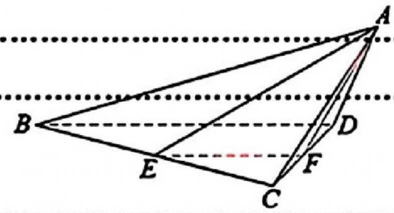
则 $DE=AE=\dfrac{5}{12}AB=\dfrac{35}{12}t$ ……………………………………………………………13 分

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理知 $AD^2=AE^2+DE^2-2AE\cdot DE\cdot\cos\angle AED$

$=2\times\left(\dfrac{35}{12}t\right)^2-2\times\left(\dfrac{35}{12}t\right)^2\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{16}{5}\times\dfrac{35^2}{12^2}\times\dfrac{15}{14}=\dfrac{25\times 42}{36}$ ……………………14 分

解得 $AD=\dfrac{5\sqrt{42}}{6}$ ……………………………………………………………………………15 分

17. 解：(1) 设 BC 的中点为 F，连接 FE，FA ……………………………………………………1 分



由 $\triangle ACD$ 是等边三角形，知 $CD\perp AF$　　　①……………………………………2 分

由中位线定理知 $EF \parallel BD$，所以 $CD\perp EF$　　②……………………………………3 分

由①②，$EA\cap EF=E$ 及 $EA,EF\subset$ 平面 AEF 可得

$CD\perp$ 平面 AEF ……………………………………………………………………………………4 分

因为 $AE\subset$ 平面 AEF，所以 $CD\perp AE\Leftrightarrow AE\perp CD$ ……………………………………5 分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，由 $\tan\angle ACB=-\sqrt{63}$，得

$\cos\angle ACB=-\sqrt{\cos^2\angle ACB}=-\sqrt{\dfrac{\cos^2\angle ACB}{\sin^2\angle ACB+\cos^2\angle ACB}}=-\sqrt{\dfrac{1}{\tan^2\angle ACB+1}}=-\dfrac{1}{8}$ ………6 分

由余弦定理：$AE^2=EC^2+AC^2-2EC\cdot AC\cdot\cos\angle ACE=9$ ……………………………………7 分

又 $AF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}CD=\sqrt{3}$，$EF=\dfrac{1}{2}BD=\sqrt{3}$ ……………………………………………………8 分

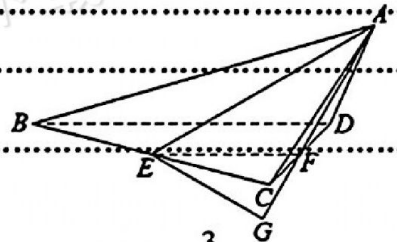
则 $\cos\angle AFE=\dfrac{EF^2+AF^2-AE^2}{2\cdot EF\cdot AF}=-\dfrac{1}{2}$ ……………………………………………………9 分

因为 $\angle AFE\in(0,\pi)$，所以 $\angle AFE=\dfrac{2\pi}{3}$ ………………………………………………………10 分

解 1： 由 $CD\perp$ 平面 AEF，$CD\subset$ 平面 ACD，

可得平面 $ACD\perp$ 平面 AEF ………………………………………………………………………11 分

在平面 AEF 内作 $EG\perp AF$ 交 AF 于点 G ……………………………………………………12 分



则 $EG\perp$ 平面 ACD，EG 为 E 到平面 ACD 的距离 …………………………………………13 分

因为 $\angle EFG=\pi-\angle AFE=\dfrac{\pi}{3}$ ……………………………………………………………………14 分

所以 $EG=EF\cdot\sin\angle EFG=\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}$，即 E 到平面 PBC 的距离为 $\dfrac{3}{2}$ ……………15 分

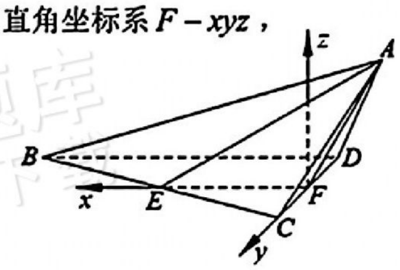
解 2： 等体积(过程略)

解 3：由 $CD \perp$ 平面 AEF，$CD \subset$ 平面 BCD，

可得平面 $BCD \perp$ 平面 AEF，

在平面 AEF 内作 $Fz \perp EF$，则 $Fz \perp$ 平面 BCD ……………………………………11 分

则 Fz, EF, CD 两两垂直，故可建立如图所示的空间直角坐标系 $F-xyz$，



则 $C(0,1,0), D(0,-1,0), E(\sqrt{3},0,0)$，

$\angle AFz = 30^\circ$，$A\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,\dfrac{3}{2}\right)$，

从而 $\overline{CE}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overline{CD}=(0,-2,0)$，$\overline{CA}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-1,\dfrac{3}{2}\right)$ ……………………12 分

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 ACD 的一个法向量，则

$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overline{CA}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overline{CD}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-y+\dfrac{3}{2}z=0, \\ -2y=0, \end{cases}$ ……………………………………13 分

取 $z=1$，则 $x=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},0,1)$ ……………………………………14 分

则点 E 到平面 ACD 的距离 $d=\dfrac{|\overline{CE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\cdots=\dfrac{3}{2}$ ……………………………………15 分

18. 解：(1) 令 $h(x)=\dfrac{g(x)-1}{f(x)}=\dfrac{\sin x+\cos x-1}{e^x}, x\in[0,2\pi]$

则 $h'(x)=\dfrac{1-2\sin x}{e^x}, x\in[0,2\pi]$ ……………………………………1 分

由 $\begin{cases} h'(x)=0, \\ x\in[0,2\pi], \end{cases}$ 解得 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$ ……………………………………2 分

可得 $h(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$ 递增，$\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 递减，$\left[\dfrac{5\pi}{6},2\pi\right]$ 递增 ……………………3 分

又 $h(0)=0$，$h\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2e^{\frac{5\pi}{6}}}<0$，$h(2\pi)=0$ ……………………………………5 分

所以 $y=\dfrac{g(x)-1}{f(x)}$ 在 $[0,2\pi]$ 上的最小值为 $-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2e^{\frac{5\pi}{6}}}$ ……………………………………6 分

(2) 设 $\varphi(x)=f(x)+g(x)-2-ax=e^x+\sin x+\cos x-2-ax$，

则 $\varphi'(x)=e^x+\cos x-\sin x-a$ ……………………………………7 分

令 $u(x)=\mathrm{e}^x+\cos x-\sin x-a$，则

$u'(x)=\mathrm{e}^x-(\sin x+\cos x)\geqslant \mathrm{e}^x-(x+1)\geqslant 0$ ……………………………………9 分

则 $u(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增……………………………………………………10 分

则 $u(x)\geqslant u(0)=2-a$ ……………………………………………………11 分

当 $2-a\geqslant 0$，即 $a\leqslant 2$ 时，$u(x)\geqslant 0$，$\varphi'(x)\geqslant 0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，$\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$ ……………………………12 分

当 $2-a<0$，即 $a>2$ 时，

$\exists x_0\in(0,+\infty)$，使得 $u(x_0)=0$，即 $\varphi'(x_0)=0$ ……………………………13 分

由于 $\forall x\in(0,x_0)$，都有 $u(x)<0$，即 $\varphi'(x)<0$ ……………………………15 分

此时 $\varphi(x)<\varphi(0)=0$，不符……………………………………………………16 分

综上，$a\leqslant 2$ ……………………………………………………………………17 分

另解： 设 $\varphi(x)=f(x)+g(x)-2-ax$，

即证 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x+\sin x+\cos x-2-ax\geqslant 0$ ……………………………………7分

得 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x+\cos x-\sin x-a$ ……………………………………………8分

当 $x=0$ 时，若 $\varphi'(0)=2-a\geqslant 0\Rightarrow a\leqslant 2$ ……………………………………9分

下面证明：当 $a\leqslant 2$ 时，$\varphi(x)=\mathrm{e}^x+\sin x+\cos x-2-ax\geqslant 0$

令 $v(x)=x-\sin x$，则 $v'(x)=1-\cos x\geqslant 0$ ……………………………………10分

所以 $v(x)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上递增，所以 $v(x)\geqslant v(0)=0$，即 $x-\sin x\geqslant 0$ ……………12分

令 $u(x)=\varphi'(x)$，则

$u'(x)=\mathrm{e}^x-\sin x-\cos x\geqslant x+1-\sin x-\cos x=x-\sin x+1-\cos x\geqslant 0$ ……………13分

所以 $\varphi'(x)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上单调递增……………………………………………14分

所以 $\varphi'(x)\geqslant\varphi'(0)=2-a\geqslant 0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上递增……………………15分

若 $a>2$，则 $\varphi'(0)<0$，即 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 右侧附近递减，

此时必存在 $\varphi(x_0)<\varphi(0)=0$，不符……………………………………………16分

综上，$a\leqslant 2$ ……………………………………………………………………17分

19. 解：(1) 当 M 在 y 轴左侧时，M 在 x 轴的负半轴上，C 的方程方程为 $y=0(x\leqslant 0)$ ……1 分

当 M 在 y 轴右侧时，M 的轨迹是以 N 为焦点，$x=-1$ 为准线的抛物线，

其方程为 $y^2=4x(x\geqslant 0)$ ……………………………………………………2 分

故 C 的方程为 $y^2=4x$ 或 $y=0(x\leqslant 0)$ ……………………………………………3 分

另解： 设$M(x,y)$，则$|x|+1=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，整理可得$y^2=4(x+|x|)$ ……1分

当$x\leqslant 0$时，$y=0$，C是一条射线 ……2分

当$x\geqslant 0$时，$y^2=4x$，C是以N为焦点，$x=-1$为准线的抛物线，

故C的方程为$y^2=4x$或$y=0(x\leqslant 0)$ ……3分

(2) 因为P_1在C上，所以$(t+1)^2=4t$，解得$t=1$ ……4分

依题意$P_n(x_n,y_n)$，$Q_n(x_{n+1},-y_{n+1})$ ……5分

则$k_{P_nQ_n}=\dfrac{-y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\dfrac{-y_{n+1}-y_n}{\dfrac{y_{n+1}^2}{4}-\dfrac{y_n^2}{4}}=\dfrac{-4}{y_{n+1}-y_n}=-1$，得$y_{n+1}-y_n=4$ ……6分

所以数列$\{y_n\}$是以$y_1=2$为首项，4为公差的等差数列，

故$y_n=2+(n-1)\times 4=4n-2$ ……7分

$x_n=\dfrac{y_n^2}{4}=(2n-1)^2$ ……8分

$\dfrac{1}{x_n+y_n}=\dfrac{1}{(2n-1)^2+4n-2}=\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$ ……9分

$T_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)$ ……10分

因为T_n关于n单调递增，所以$\dfrac{1}{3}\leqslant T_n<\dfrac{1}{2}$ ……11分

(3) 由(2)可得$P_n\left(4n-2,(2n-1)^2\right)$，$P_{n+1}\left(4n+2,(2n+1)^2\right)$，$P_{n+2}\left(4n+6,(2n+3)^2\right)$ ……12分

解1： 直线P_nP_{n+2}的方程为

$$y-(2n-1)^2=\frac{(2n+3)^2-(2n-1)^2}{4n+6-4n+2}(x-4n+2)=(2n+1)(x-4n+2),$$

即$(2n+1)x-y-4n^2-4n+3=0$ ……13分

点P_{n+1}到直线P_nP_{n+2}的距离

$d=\dfrac{\left|2(2n+1)^2-(2n+1)^2-4n^2-4n+3\right|}{\sqrt{(2n+1)^2+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{(2n+1)^2+1}}$ ……15分

$|P_nP_{n+2}|=\sqrt{(4n+6-4n+2)^2+\left[(2n+3)^2-(2n-1)^2\right]^2}$

$=\sqrt{64(2n+1)^2+64}=8\sqrt{(2n+1)^2+1}$ ……16分

所以$\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$的面积$S=\dfrac{1}{2}|P_nP_{n+2}|d=16$ ……17分

解 2：$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}=(4,8n)$，$\overrightarrow{P_nP_{n+2}}=(8,8(2n+1))$ ……………………………………13 分

则$\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ 的面积

$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{P_nP_{n+1}}||\overrightarrow{P_nP_{n+2}}|\sin\angle P_{n+2}P_nP_{n+1}$ ……………………………………14 分

$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{P_nP_{n+1}}|^2|\overrightarrow{P_nP_{n+2}}|^2\sin^2\angle P_{n+2}P_nP_{n+1}}$ ……………………………………15 分

$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{P_nP_{n+1}}|^2|\overrightarrow{P_nP_{n+2}}|^2(1-\cos^2\angle P_{n+2}P_nP_{n+1})}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(|\overrightarrow{P_nP_{n+1}}||\overrightarrow{P_nP_{n+2}}|)^2-(\overrightarrow{P_nP_{n+1}}\cdot\overrightarrow{P_nP_{n+2}})^2}$ ……………………………………16 分

$=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=\frac{1}{2}|4\times8(2n+1)-8\times8n|=16$ ……………………………………17 分